## 0.1 Smooth manifold

### Definition 0.1.1

$U \subset \mathbf{R}^m$ : open、$r \geqq 0$ に対し、$f : U \longrightarrow \mathbf{R}$ が $C^r$ 級関数であるとは、$f$ の 1 階から $r$ 階までの偏導関数が存在し、$f$ も含めそれらがすべて $U$ 上で連続の時を示す。また、すべての $r$ についてに $C^r$ 級であるとき、$f$ を $C^\infty$ 級関数と呼ぶ。ちなみに、ただの連続写像ならば $C^0$ 級ということになる。

$U \subset \mathbf{R}^m$ , $V \subset \mathbf{R}^n$ : open とし、$f : U \longrightarrow V$ が $C^r$-map とは、$f$ の成分表示、

$$f = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$$

ですべての $f_i (= pr_i \circ f)$ が $U$ 上の $C^r$ 級関数であるときを言う。

$f : U \longrightarrow V$ : $C^r$-map に対し、$g : V \longrightarrow U$ : $C^r$-map が存在し、$g \circ f = 1$ , $f \circ g = 1$ を満たすとき、$f$ は $C^r$ diffeomorphism という。$C^0$-diffeomorphism=homeomorphism である。

### Definition 0.1.2

空間 $X$ をその開集合 $U$ に対し、$\mathbf{R}^m$ の開集合 $V$ への homeomorphism

$$\varphi : U \xrightarrow{\cong} U'$$

を考えたとき、$(U, \varphi)$ を $X$ の $m$ 次元の局所座標系と呼ぶ。

### Definition 0.1.3

$r \geqq 0$ または、$\infty$ とする。位相空間 $M$ と $M$ の局所座標系の族、$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ が与えられ次の条件を満たすとき、$M$ を $m$ 次元 $C^r$ 級多様体と呼ぶ。

1. $M$ : Haudorff で、$M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$
2. $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ である任意の $\alpha, \beta \in A$ に対し、座標変換と呼ばれる

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

が $C^r$-map となる。

### Example 0.1.4

もちろん位相多様体で扱った例は $C^\infty$-manifold になっている。特に座標近傍系は書かないが位相多様体の時と同様に自然に定まる。

1. $\mathbf{R}^m$ は $m$ 次元 $C^\infty$-manifold
2. $S^m$ は $m$ 次元 $C^\infty$-manifold
3. $M, N$ をそれぞれ $m$ 次元 $C^r$-manifold と、$n$ 次元 $C^r$-manifolde とすると、$M \times N$ は $n+m$ 次元 $C^r$-manifold である。特に $m$ 次元トーラスは $m$ 次元 $C^\infty$-manifold
4. $\mathbf{R}P^m$ は $m$ 次元 $C^\infty$-manifold

5. $M$ を $m$ 次元 $C^r$-manifold とすると、$U \subset M$ : open は $m$ 次元 $C^r$-manifold

$C^r$-manifold は空間と座標近傍系の pair により構成される。つまり、空間が同じだとしても座標近傍系の取り方により、違った多様体ができる。そのことについて少し。

### Definition 0.1.5

$m$ 次元 $C^r$ 級多様体の 2 つの座標近傍系、$S = \{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ , $T = \{V_\beta, \psi_\beta\}_{\beta \in B}$ が同値であるとは、$S \cup T$ がまた、$M$ 上の $C^r$ 級座標近傍系となることである。

つまり、$S$ の局所座標から、$T$ の局所座標への座標変換も $C^r$-map になるということを意味している。

### Remmark 0.1.6

上記の relation は同値関係となり、この同値関係で割ったものを多様体と考える。これは、同値な座標近傍系の取り方によらないものを多様体の性質と考えたいからである。これから考える様々な多様体の概念は座標近傍系に取り方によらないことは省略する。

### Definition 0.1.7

$M$ を $m$ 次元 $C^r$-manifold とし、$M$ 上の関数 $f : M \longrightarrow \mathbf{R}$ が $C^s$-function であるとは、$M$ の任意の局所座標 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ に対し、

$$f \circ \varphi_\alpha^{-1} : U'_\alpha \longrightarrow \mathbf{R}$$

が $C^s$-function であるときのことを指す。

### Example 0.1.8

$m \geqq 0$ で、$1 \leqq k \leqq m+1$ に対し、$h_k = pr_k : S^m \longrightarrow \mathbf{R}$ は $S^m$ 上の $C^\infty$-function である。これを hight function と呼ぶ。

### Definition 0.1.9

$M, N$ をそれぞれ、$m$ 次元、$n$ 次元の $C^r$-manifold とし、$0 \leqq s \leqq r \leqq \infty$ に対し、連続写像 $f : M \longrightarrow N$ が点 $p \in M$ において、$C^s$-map とは、$p \in U$、$f(p) \in V$ となる $M, N$ の座標近傍 $(U, \varphi)$ , $(V, \psi)$ が存在し、

1. $f(U) \subset V$

2. $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : U' \longrightarrow V'$ が $C^s$-map

を満たすことを言う。また、任意の $p \in M$ で $f$ が $C^s$-map のとき、単に $f$ は $C^s$-map と呼ぶ。

### Example 0.1.10

1. 2 つの $C^s$-map の合成は $C^s$-map である。

2. $C^s$-function $M \longrightarrow \mathbf{R}$ は $C^s$-map

3. $C^r$-manifold $M$ の sub manifold からの inclusion は $C^r$-map

4. projection $S^m \longrightarrow \mathbf{R}P^m$ は $C^\infty$-map

5. $M, N$ をともに $C^r$-manifold としその積多様体からの projection $M \times N \longrightarrow M$ , $M \times N \longrightarrow N$ はともに $C^r$-map

## Definition 0.1.11

$M, N$ を $C^r$-manifold とする。このとき、$f : M \longrightarrow N$ が $C^s$-diffeomorphism とは、$f : M \longrightarrow N$ が $C^s$-map で、$g : N \longrightarrow M$ : $C^s$-map が存在し、$g \circ f = 1$ , $f \circ g = 1$ を満たすことである。

## Definition 0.1.12

$C^{r,s}$ を $C^r$-manifold と $C^s$-map のなす category とする。特に、$C^{\infty,\infty} = C^\infty$ とかく。